1975

Grafiche G. V. - Milano

Capitolo I

SPAZI METRICI

1. Definizione ed esempi.

Richiamiamo qui brevemente la definizione (già nota) di spazio metrico.
Si chiama spazio metrico un insieme E cui è associata una funzione $d: E \times E \rightarrow R^+$ che goda delle tre proprietà seguenti:

1°) $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$;

2°) $d(x,y) = d(y,x)$;

3°) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \qquad \forall\, x,y,z \in E$

(la proprietà 3°) implica, come è ben noto, che sia anche $d(x,z) \geq |d(x,y)-d(y,z)|$).
Il numero $d(x,y)$ viene chiamato distanza fra x e y.
Diamo ora qualche esempio elementare di spazio metrico.

1°) Lo spazio R^n, o lo spazio C^n con

$$d(\underline{x},\underline{y}) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} .$$

Questa metrica è la ben nota "metrica naturale" o "metrica euclidea".

2°) Un insieme E qualsiasi, con

$$d(x,y)=1 \text{ se } x \neq y \;, \quad d(x,y)=0 \text{ se } x=y.$$

Questa metrica è la cosiddetta "metrica discreta".

3°) L'insieme N degli interi positivi, qualora si ponga

$$d(x,x)=0 \qquad \forall\ x \in N$$

$$d(x,y)=\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right| \qquad \forall\ x,y \in N \quad , \quad x \neq y \ .$$

4°) La retta reale, con

$$(1.1) \qquad d(x,y) = |f(x) - f(y)|$$

dove $f: R \to R$ è una qualsiasi funzione strettamente monotona.

5°) L'insieme delle successioni $\{x_n\}$ limitate di numeri reali, con

$$d(x,y) = \sup_n |x_n - y_n| \quad .$$

2. Spazi vettoriali normati.

Sia X uno spazio vettoriale sul corpo K dei numeri reali o complessi. Diremo che X è normato quando su X è definita una funzione $\underline{x} \to \|\underline{x}\|$, detta norma, che gode le proprietà seguenti :

1°) $\|\underline{x}\| \geq 0 \quad \forall\ \underline{x} \in X \quad , \quad \|\underline{x}\| = 0 \Leftrightarrow \underline{x} = \underline{0}$;

2°) $\|\lambda \underline{x}\| = |\lambda| \|\underline{x}\| \quad \forall\ \underline{x} \in X \text{ e } \forall\ \lambda \in K$;

3°) $\|\underline{x}+\underline{y}\| \leq \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\| \quad \forall\ \underline{x}\ ,\ \underline{y} \in X$

da cui segue $\big|\ \|\underline{x}\| - \|\underline{y}\|\ \big| \leq \|\underline{x}-\underline{y}\|$.

Ogni spazio vettoriale normato può essere considerato uno spazio metrico, con la posizione seguente:

$$d(\underline{x},\underline{y}) = \|\underline{x}-\underline{y}\| \qquad \forall\ x\ ,\ y \in X \quad .$$

La metrica così definita gode, in aggiunta alle proprietà generali, delle seguenti

1°) invarianza per traslazione :

$$d(\underline{x}+\underline{z},\underline{y}+\underline{z}) = d(\underline{x},\underline{y}) \qquad \forall\ \underline{x},\underline{y},\underline{z} \in X$$

2°) omogeneità

$$d(\lambda\underline{x},\lambda\underline{y}) = |\lambda|\, d(\underline{x},\underline{y}) \qquad \forall\ \underline{x},\underline{y} \in X \text{ e } \forall\ \lambda \in K \ .$$

Viceversa, se la metrica di uno spazio vettoriale metrico X soddisfa le due proprietà precedenti, X

può essere considerato uno spazio normato con la posizione seguente :

$$\|\underline{x}\| = d(\underline{x},\underline{0}) \quad .$$

Gli spazi metrici di cui ai punti 1) e 5) del paragrafo precedente sono esempi di spazi vettoriali normati, qualora si ponga $\|\underline{x}\| = d(\underline{x},\underline{o})$. Lo spazio di cui al punto 5) è anche esempio di spazio vettoriale normato di dimensione infinita.

3. Spazi metrici completi. Completamento di uno spazio metrico.

Prendiamo ora in esame le principali analogie e differenze fra lo spazio euclideo R^n ed uno spazio metrico E qualsiasi.

Cominciamo con lo studiare il problema della convergenza di una successione. Sia $\{x_n\}$ una successione di punti di E; diremo che $\{x_n\}$ converge ad x e scriveremo

$\{x_n\} \to x$ se esiste $x \in E$ tale che

$$d(x,x_n) \to 0 \qquad \text{per} \qquad n \to +\infty \quad .$$

Come si vede, la definizione è del tutto simile a quella che si dà per le successioni convergenti di R^n. Ragionando in modo analogo al caso di successioni di R^n, si prova che una successione non può convergere a due limiti distinti e che una sottosuccessione parziale di una successione convergente converge anch'essa allo stesso limite.

Inoltre si dimostra che

" Se $\{x_n\} \to x$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_o = n_o(\varepsilon)$ tale che :

$$(3.1) \qquad n,m \geq n_o \Longrightarrow d(x_n,x_m) < \varepsilon \quad . \text{"}$$

La condizione di Cauchy è dunque necessaria per la convergenza di una successione. Essa non è però sempre sufficiente.

Consideriamo infatti per esempio la retta reale R dotata della metrica (1.1) con f continua e limitata in R . La successione degli interi positivi soddisfa, in questo spazio metrico, la (3.1), eppure non converge.

Ora, il fatto che la (3.1) sia sufficiente per la convergenza di una successione di punti in R^n (o C^n) ha importanza fondamentale, perchè permette di riconoscere le successioni convergenti, senza che sia preventivamente necessario conoscere il limite della successione. Per noi avrà perciò importanza essenziale il sapere se, nello spazio che si considera, la (3.1) è sufficiente per la convergenza oppure no. Conveniamo allora di chiamare successione di Cauchy una qualunque successione $\{x_n\}$ di punti di E soddisfacente (3.1), cioè tale che

$$(3.2) \qquad \forall\, \varepsilon > 0 \ \exists n_o = n_o(\varepsilon) : \ n,m > n_o \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad ;$$

e di chiamare la (3.2) condizione di Cauchy.
E' facile dimostrare che ogni successione di Cauchy è limitata e che qualunque sua sottosuccessione è una successione di Cauchy.
Inoltre, se una successione di Cauchy contiene una sottosuccessione convergente, converge anch'essa allo stesso limite.
Diremo che uno spazio metrico è completo se qualunque sua successione di Cauchy è convergente.
Gli spazi metrici completi sono dunque quelli in cui la condizione di Cauchy è necessaria e sufficiente per la convergenza.
Gli spazi metrici di cui ai punti 1,2,5 del paragrafo 1 sono esempi di spazi metrici completi.

Se E è uno spazio metrico non completo, è sempre possibile determinare uno spazio completo che contiene E come suo sottoinsieme. Lo afferma il seguente, fondamentale

Teorema 3.1 (del completamento) - Se E è uno spazio metrico non completo, esiste uno spazio metrico completo $\tilde{E}$ che contiene un insieme $\tilde{I}$ che gode delle due proprietà seguenti :

a) $\tilde{I}$ è isometrico ad E (*);

(*) Si dice che due spazi metrici E_1, E_2 sono isometrici qualora esista una biiezione $x_1 \longleftrightarrow x_2$ di E_1 su E_2 tale che

(o) $\qquad x_1 \leftrightarrow x_2 \wedge y_1 \leftrightarrow y_2 \Rightarrow d(x_1,y_1) = d(x_2,y_2) \quad .$

Una biiezione soddisfacente la (o) viene detta isometria.
Se E_1 e E_2 sono isometrici, essi possono essere identificati per tutto ciò che riguarda le proprietà metriche.

b) $\tilde{I}$ è denso in $\tilde{E}$.

Inoltre, se E è uno spazio vettoriale, $\tilde{I}$ ed E sono linearmente isometrici (*).

Lo spazio $\tilde{E}$ è univocamente determinato a meno di una isometria; esso viene chiamato il "completato" (o il "completamento") di E .

La dimostrazione del teorema 3.1 procede in modo analogo alla costruzione secondo Cantor dell'insieme dei numeri reali a partire dai numeri razionali; ne diamo qui lo schema.
Consideriamo l'insieme delle successioni $\{x_n\}$ di Cauchy di elementi di E e dividiamolo in classi rispetto alla relazione di equivalenza

$$\{x_n\} \equiv \{x'_n\} \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} d(x_n, x'_n) = 0 \quad .$$

Diciamo $\tilde{E}$ l'insieme di queste classi di equivalenza. Ci proponiamo ora di introdurre in $\tilde{E}$ una opportuna metrica.

Siano $\tilde{x}, \tilde{y}$ due elementi qualsiasi di $\tilde{E}$ e siano $\{x_n\}, \{y_n\}$ due successioni appartenenti, rispettivamente, alle classi $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$. Poichè

$$|d(x_n,y_n) - d(x_m,y_m)| \leq d(x_n,x_m) + d(y_n,y_m) \rightarrow 0$$

per $n,m \rightarrow +\infty$, la successione di numeri reali $\{d(x_n,y_n)\}$ converge per $n \rightarrow +\infty$. Poniamo

$$(3.3) \qquad d(\tilde{x},\tilde{y}) = \lim_{n\to+\infty} d(x_n,y_n) \quad .$$

E' facile verificare che il valore limite a secondo membro non dipende dalle particolari successioni $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ prescelte in $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$. Inoltre esso soddisfa le proprietà 1°) 2°) e 3°) del paragrafo

(*) Due spazi vettoriali metrici E_1 ed E_2 sono detti linearmente isometrici quando esiste una isometria $x_1 \leftrightarrow x_2$ di E_1 su E_2 tale che

(o) $\qquad x_1 \leftrightarrow x_2 \Rightarrow \lambda x_1 \leftrightarrow \lambda x_2 \quad \forall \lambda \in K \ ;$

$\qquad x_1 \leftrightarrow x_2 \wedge y_1 \leftrightarrow y_2 \Rightarrow x_1+y_1 \leftrightarrow x_2+y_2 \quad .$

Una isometria soddisfacente le (o) viene chiamata isometria lineare.
Due spazi vettoriali metrici E_1 e E_2 linearmente isometrici, per quanto riguarda le proprietà lineari e metriche, sono identificabili.

1 . Di conseguenza, con la posizione (3.3) l'insieme $\tilde{E}$ diviene uno spazio metrico.

Ad ogni $x \in E$ facciamo corrispondere l'elemento $\tilde{x}$ di $\tilde{E}$ individuato dalla successione che ha tutti gli elementi eguali ad x. Questa corrispondenza è evidentemente una isometria fra E e un sottoinsieme proprio $\tilde{I}$ di $\tilde{E}$ (anzi, una isometria lineare se E è lineare).

Sia $\tilde{x} \in \tilde{E}$ qualsiasi e sia $\{x_n\}$ una successione qualunque della classe $\tilde{x}$. Diciamo $\tilde{x}_n$ l'elemento di $\tilde{I}$ corrispondente a x_n. Poichè

$$d(\tilde{x},\tilde{x}_n) = \lim_{j\to+\infty} d(x_j,x_n) \longrightarrow 0$$

se $n \to +\infty$, l'insieme $\tilde{I}$ è denso in $\tilde{E}$.

Dimostriamo infine che $\tilde{E}$ è completo. Sia $\{\tilde{x}_n\}$ una successione di Cauchy in $\tilde{E}$; poichè $\tilde{I}$ è denso in $\tilde{E}$, per ogni n esiste $\tilde{y}_n \in \tilde{I}$ tale che

$$d(\tilde{x}_n,\tilde{y}_n) < \frac{1}{n} \quad .$$

Sia y_n l'elemento di E corrispondente a $\tilde{y}_n$. Si ha

$$\begin{aligned} d(y_n,y_m) &= d(\tilde{y}_n,\tilde{y}_m) \\ &\leq d(\tilde{y}_n,\tilde{x}_n)+d(\tilde{x}_n,\tilde{x}_m)+d(\tilde{x}_m,\tilde{y}_m) \\ &\leq \frac{1}{n}+\frac{1}{m}+d(\tilde{x}_n,\tilde{x}_m) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

per $n, m \to +\infty$. Quindi $\{y_n\}$ è una successione di Cauchy in E e individua un elemento $\tilde{y}$ in $\tilde{E}$. Poichè

$$d(\tilde{y},\tilde{x}_n) \leq d(\tilde{y},\tilde{y}_n)+d(\tilde{y}_n,\tilde{x}_n) = \lim_{m\to+\infty} d(y_m,y_n)+\frac{1}{n} \to 0$$

per $n \to +\infty$, la successione $\{\tilde{x}_n\}$ converge ad $\tilde{y}$. Lo spazio $\tilde{E}$ è quindi completo ed il teorema 3.1 è dimostrato.

Inoltre, se E^* è un altro spazio metrico completo contenente un insieme I^* che soddisfa le condizioni a) e b) del teorema 3.1, allora E^* e $\tilde{E}$ sono isometrici. Infatti, $\tilde{I}$ e I^* sono isometrici (perchè entrambi isometrici ad E). Sia $\tilde{x} \in \tilde{E}$ qualunque e $\{\tilde{x}_n\}$ una successione di elementi di $\tilde{I}$ convergente a $\tilde{x}$. La successione $\{x_n^*\}$ dei corrispondenti elementi di I^* è allora di Cauchy e perciò converge ad un elemento x^* di E^*. La corrispondenza $\tilde{x} \leftrightarrow x^*$ realizza l'isometria fra $\tilde{E}$ ed E^* cercata.

Le considerazioni svolte in questo paragrafo a proposito degli spazi metrici valgono, ovviamente, anche nel caso di spazi vettoriali normati. In particolare, in uno spazio X normato:

$$\{x_n\} \to x \Rightarrow \|x-x_n\| \to 0 \quad ;$$

$$\{x_n\} \to x \Rightarrow \|x_n\| \to \|x\| \quad ;$$

$$\{x_n\} \to x \Rightarrow \{\lambda x_n\} \to \lambda x \qquad \forall \lambda \in K \quad ;$$

$$\{x_n\} \to x \wedge \{y_n\} \to y \Rightarrow \{x_n+y_n\} \to x+y$$

e la condizione di Cauchy diviene:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_o = n_o(\varepsilon): \quad n,m > n_o \Rightarrow \|x_n - x_m\| < \varepsilon \quad .$$

Inoltre dal teorema 3.1 si deduce che se X è uno spazio normato non completo, esiste uno spazio normato completo $\tilde{X}$ (univocamente determinato a meno di una isometria lineare) che contiene un insieme $\tilde{I}$ denso in $\tilde{X}$ e linearmente isometrico ad X.

Se $\tilde{x} \in \tilde{X}$ e $\{x_n\}$ è una qualsiasi successione di Cauchy in X che individua $\tilde{x}$, risulta necessariamente

$$\|\tilde{x}\| = \lim_{n\to+\infty} \|x_n\| \quad . \tag{3.4}$$

Gli spazi vettoriali normati completi vengono abitualmente chiamati spazi di Banach. Essi hanno importanza fondamentale in Analisi funzionale, perchè sono i più generali spazi vettoriali nei quali il passaggio al limite gode di proprietà analoghe a quelle nello spazio R^n.

Gli spazi di cui al punto 1) e 5) del paragrafo 1 sono spazi di Banach.

4. Spazi funzionali.

Siano E,F due insiemi qualsiasi. L'insieme delle funzioni definite su E a valori in F viene chiamato spazio funzionale ed indicato con F^E (°).
Supponiamo che F sia uno spazio vettoriale sul corpo K dei reali (o dei complessi). Poniamo :

$$(4.1)\quad \begin{aligned} &(f+g)(x)=f(x)+g(x) && \forall x\in E \text{ e } \forall f,g\in F^E;\\ &(\lambda f)(x)=\lambda f(x) && \forall x\in E,\ \forall \lambda\in K \text{ e } \forall f\in F^E. \end{aligned}$$

Risultano così definite in F^E una legge di addizione ed una di moltiplicazione per gli elementi di K che soddisfano evidentemente le condizioni richieste perchè F^E sia uno spazio vettoriale su K.
In questo modo, la struttura vettoriale di F induce in F^E una struttura analoga di spazio vettoriale (*).
In particolare, l'insieme delle funzioni definite in un insieme $E\subseteq R^n$ a valori in R^m con le posizioni (4.1) è uno spazio vettoriale sul corpo reale.

Supponiamo ora che F sia uno spazio vettoriale normato e consideriamo l'insieme F^E_ℓ delle funzioni f di F^E limitate su E , cioè tali che

$$\sup_{x\in E}\|f(x)\|<+\infty .$$

F^E_ℓ è a sua volta uno spazio vettoriale (contenuto in F^E); è facile verificare che, qualora si ponga per ogni $f\in F^E_\ell$

(°) Questa notazione generalizza quella abitualmente usata per lo spazio R^n, che può essere considerato, da questo punto di vista, come l'insieme di tutte le possibili applicazioni della n-pla 1,2...n nell'insieme dei reali.

(*) Si noti che una qualsiasi classe di funzioni non costituisce in generale uno spazio vettoriale qualora si definisca l'addizione e la moltiplicazione mediante le (4.1); per esempio l'insieme delle funzioni reali monotone in un intervallo non costituisce uno spazio vettoriale.

$$(4.2)\qquad \|f\|_{F^E_\ell} = \sup_{x\in E}\|f(x)\|_F ,$$

esso diviene a sua volta uno spazio vettoriale normato.
La norma definita da (4.2) viene abitualmente chiamata "norma dell'estremo superiore" e viene indicata, per semplificare la simbologia ed evitare confusioni con la norma degli elementi di F , col simbolo $|||f|||$.
In questo modo, la struttura di spazio normato di F induce in F^E una struttura analoga di spazio normato.(°)
In particolare, l'insieme delle funzioni definite in un insieme $E\subseteq R^n$ a valori in R^m e limitate è uno spazio normato, con $|||f|||$ assegnata da (4.2).
Nel caso m=1 si ha (senza possibilità di equivoci di simbologia!)

$$|||f||| = \sup_{x\in E}|f(x)| .$$

Conveniamo, per semplicità di scrittura, di indicare, qui e nel seguito, lo spazio vettoriale F^E_ℓ normato con la (4.2) col simbolo M (o M(E) o $M_F(E)$, se necessario per evitare confusioni).
Esaminiamo ora il significato della convergenza in M. Osserviamo che

$$f_n \xrightarrow[M]{} f$$
$$\Updownarrow$$
$$|||f-f_n|||\to 0 \qquad \text{per } n\to+\infty$$
$$\Updownarrow$$
$$\sup_{x\in E}\|f(x)-f_n(x)\|\to 0 \qquad \text{per } n\to+\infty$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_o=n_o(\varepsilon):\ \forall x\in E \qquad n>n_o \Rightarrow \|f(x)-f_n(x)\|<\varepsilon .$$

Pertanto la convergenza in M della successione $\{f_n\}$ ad f equivale alla convergenza uniforme sull'insieme E di definizione della successione di funzioni $\{f_n(x)\}$ alla funzione f(x).
Questo giustifica il nome di "norma della conver

(°) Si giustifica così il nome di "norma naturale" col quale si indica talvolta $|||f|||$.

genza uniforme" che viene sovente dato alla norma (4.2).
Osserviamo infine che la completezza di F implica la completezza di M. Vale infatti il seguente

Teorema 4.1 - Se F è uno spazio di Banach, anche M è uno spazio di Banach.

Infatti, sia $\{f_n\}$ una successione di Cauchy in M. Allora $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_o = n_o(\varepsilon)$:

$$n,m > n_o(\varepsilon) \Rightarrow |||f_m - f_n||| < \varepsilon$$
$$\Updownarrow$$
$$n,m > n_o(\varepsilon) \Rightarrow \sup_{x \in E} \|f_m(x) - f_n(x)\| < \varepsilon$$
$$\Updownarrow$$
$$n,m > n_o(\varepsilon) \Rightarrow \|f_m(x) - f_n(x)\| < \varepsilon \quad \forall x \in E \ . \tag{4.3}$$

Da (4.3) segue che $\{f_n(x)\}$ è, per ogni x di E, una successione di Cauchy in F e quindi converge in F ad un limite $f(x)$.

Per dimostrare il teorema, bisogna provare che $f \in M$ e che $\{f_n\} \xrightarrow[M]{} f$ cioè che $|||f - f_n||| \to 0$ per $n \to +\infty$.

Teniamo in (4.3) n fisso e facciamo tendere m a infinito; si ricava:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_o = n_o(\varepsilon) : n > n_o \Rightarrow \|f(x) - f_n(x)\| < \varepsilon \ \forall x \in E ,$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_o = n_o(\varepsilon) : n > n_o \Rightarrow \sup_{x \in E} \|f(x) - f_n(x)\| < \varepsilon , \tag{4.4}$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_o = n_o(\varepsilon) : n > n_o \Rightarrow |||f - f_n||| < \varepsilon .$$

Quindi $f - f_n \in M$ e dunque anche $f = f_n + (f - f_n) \in M$.
Inoltre sempre da (4.4) si ricava che $|||f - f_n||| \to 0$ per $n \to +\infty$ ed il teorema è dimostrato.

Corollario 4.1 - Sia E un insieme arbitrario. L'insieme delle funzioni definite in E, a valori in R^n $(n \geq 1)$ e ivi limitate, normato con la norma dell'estremo superiore è uno spazio di Banach.
Infatti, R^n è completo.

5. Lo spazio funzionale $\mathscr{C}(T)$.

Limitiamoci, per semplicità, a considerare un compatto $T \subset R^n$ $(n \geq 1)$ e l'insieme $M(T)$ delle funzioni definite in T , a valori in R^m $(m \geq 1)$ e limitate. Ad $M(T)$ appartiene, per un noto teorema , qualunque funzione continua su T .
L'insieme $\mathscr{C}(T)$ di tali funzioni è un sottoinsieme proprio di $M(T)$ ed è facile verificare che costituisce uno spazio vettoriale contenuto in $M(T)$. Esso è anche chiuso in $M(T)$, cioè costituisce a sua volta uno spazio normato completo. Vale infatti il seguente

Teorema 5.1 - Lo spazio vettoriale $\mathscr{C}(T)$ delle funzioni definite su un compatto $T \subset R^n$, a valori in R^m, continue su T, normato con la norma dell'estremo superiore, è uno spazio di Banach.

Infatti, sia $\{f_n\}$ una successione di Cauchy in $\mathscr{C}(T)$: essa, pensata come successione di punti di $M(T)$, è ancora una successione di Cauchy e, per la completezza di M, converge in M a una funzione f. Il teorema sarà dimostrato se proveremo che $f \in \mathscr{C}(T)$, cioè che f è continua. Sia x_o un qualunque punto di T; per ogni n risulta

$$\|f(x_o) - f(x)\| \leq \|f(x_o) - f_n(x_o)\| + \|f_n(x_o) - f_n(x)\| + \|f_n(x) - f(x)\| \ . \tag{5.1}$$

Sia $\varepsilon > 0$ arbitrario; poichè $\{f_n\} \xrightarrow[M]{} f$, esiste $n = n(\varepsilon)$ tale che il primo e il terzo termine del secondo membro di (5.1) non superino ε . Per la continuità di f_n , è possibile determinare $\delta = \delta(\varepsilon)$ tale che risulti $\|f_n(x_o) - f_n(x)\| \leq \varepsilon$ per $\|x - x_o\| < \delta$.
Da (5.1) si ricava allora

$$\|f(x_o) - f(x)\| \leq 3\varepsilon \quad \text{per} \quad \|x - x_o\| < \delta = \delta(\varepsilon)$$

e cioè f è continua in x_o , c.d.d.

Osservazione - Considerazioni e risultati del tutto analoghi valgono anche se T non è compatto, qualora si considerino le funzioni continue e limitate su T .

6. La condizione di Lipschitz.

Negli spazi metrici completi (e quindi, in particolare, negli spazi di Banach) esistono strumenti utilissimi ed eleganti per stabilire teoremi di esistenza e unicità per le soluzioni di equazioni funzionali sia nell'Analisi classica che in quella moderna: i teoremi di punto unito.

Il più semplice di essi è abitualmente chiamato "teorema delle contrazioni". Prima di enunciare questo teorema, è opportuno illustrare la cosiddetta "condizione di Lipschitz".
Siano E,F due spazi metrici e sia $f:E\to F$. Diremo che f è "lipschitziana con costante di Lipschitz K" o, più semplicemente, lip K , se f soddisfa la seguente "condizione di Lipschitz":

$$(6.1)\quad \exists K : d(f(x_1),f(x_2))\leq Kd(x_1,x_2) \quad \forall x_1,x_2\in E .$$

E' facile dimostrare il

Teorema 6.1 - Se f soddisfa la condizione di Lipschitz, allora è uniformemente continua in E.

Infatti, sia $\varepsilon>0$; basta assumere $\delta<\varepsilon/K$ per ottenere da (6.1)

$$d(f(x_1),f(x_2))<\varepsilon \quad \forall x_1,x_2\in E .$$

Per funzioni reali di una variabile reale la condizione di Lipschitz assume la forma seguente: esiste K tale che, per ogni coppia di punti x_1,x_2 dell'insieme E di definizione, risulta

$$(6.2)\quad |f(x_1)-f(x_2)|<K|x_1-x_2| \quad ;$$

cioè una tale funzione è a rapporto incrementale limitato in E .

Una funzione $f: R\to R$ lipschitziana in un intervallo I non è necessariamente derivabile; però , se esiste $f'(x)$, risulta necessariamente, per la (6.2) , $|f'(x)|<K$ e cioè la derivata prima di f è limitata in I . Vale anche il viceversa, e cioè il

Teorema 6.2 - Sia $f:R\to R$ derivabile in ogni punto di un intervallo I e la sua derivata sia limitata in I : allora f è lip K in I con

$$(6.2)\quad K = \sup_{x\in I}|f'(x)| \quad .$$

Infatti, per il teorema dell'incremento finito , $\forall x_1,x_2\in I$ risulta

$$|f(x_1)-f(x_2)|=|f'(\bar{x})(x_1-x_2)| \quad (\bar{x}\in(x_1,x_2))$$
$$\leq K|x_1-x_2| \quad .$$

Vedremo (capitolo II , teorema 6.3) che questo teorema può venire esteso alle funzioni $f:R^n\to R^m$ $(n,m\geq 1)$.

7. Il teorema delle contrazioni.

Sia E un insieme qualsiasi e f un'applicazione di E in sè. Ogni soluzione dell'equazione $f(x)=x$ viene chiamata "punto unito" o "punto fisso" di f.
Sia E uno spazio metrico e $f:E\to E$ sia lip K con $K<1$. Allora diremo che f è una "contrazione" di E in sè.
Vale il seguente

Teorema 7.1 - Ogni contrazione di uno spazio metrico completo in sè ha uno ed un solo punto unito.

Cominciamo a dimostrare l'esistenza di un punto unito. Scelto arbitrariamente un punto $x_0 \in E$, poniamo:

$$x_n = f(x_{n-1}) \qquad n=1,2,\dots\dots \tag{7.1}$$

Poichè f è una contrazione, risulta

$$d(x_{n+1},x_n) \le K\, d(x_n,x_{n-1}) \le K^2 d(x_{n-1},x_{n-2}) \le \dots\dots \le K^n d(x_1,x_0)$$

per un opportuno $K<1$. Di conseguenza, se $m>n$ risulta

$$\begin{aligned} d(x_m,x_n) &\le \sum_{i=n}^{m-1} d(x_{i+1}x_i) \\ &\le \sum_{i=n}^{m-1} K^i d(x_1,x_0) \le K^n d(x_1,x_0) \sum_{i=0}^{m-n-1} K^i \\ &\le \frac{K^n}{1-K}\, d(x_1,x_0) \quad . \end{aligned} \tag{7.2}$$

Quindi $\{x_n\}$ è una successione di Cauchy. Sia $\bar{x}$ il suo limite. Per la continuità di f, da (7.1) segue:

$$\bar{x} = \lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} f(x_{n-1}) = f(\lim_{n\to+\infty} x_{n-1}) = f(\bar{x})$$

e cioè $\bar{x}$ è unito.

Dimostriamo ora l'unicità del punto unito. Se, oltre ad $\bar{x}$, esistesse un altro punto unito x^*, si avrebbe

$$d(\bar{x},x^*) = d(f(\bar{x}),f(x^*)) \le K\, d(\bar{x},x^*)$$

con $K<1$, il che è assurdo.

Osservazioni - 1°) Nella dimostrazione dell'unicità del punto unito non si fa uso dell'ipotesi che E sia completo; tale ipotesi è invece essenziale nella dimostrazione dell'esistenza del punto fisso.

2°) La dimostrazione del teorema indica anche un metodo per ottenere effettivamente il punto unito: basta usare la (7.1) partendo da un punto x_0 arbitrario. La successione $\{x_n\}$ che così si ottiene ha come limite il punto unito. Questo procedimento prende il nome di "metodo delle approssimazioni successive" e converge abbastanza rapidamente. Da (7.2) si ricava infatti

$$d(\bar{x},x_n) = \lim_{m\to+\infty} d(x_m,x_n) \le \frac{K^n}{1-K}\, d(x_1,x_0) \quad .$$

3°) La condizione $K<1$ è essenziale: infatti, ad esempio, la traslazione $x \to x+1$ $(x \in R)$ non ha punti uniti.

8. Applicazioni.

Come abbiamo già segnalato, il teorema delle contrazioni può essere utilmente applicato nello studio di vari problemi. Noi, in particolare, lo utilizzeremo nella teoria delle equazioni differenziali per stabilire alcuni teoremi fondamentali (capitolo XII par. 4 e 5).
Accenniamo qui ad una semplicissima applicazione di tale teorema alla soluzione di equazioni algebriche o trascendenti.
Sia $f: R \to R$ e consideriamo l'equazione $f(x)=0$. I suoi zeri coincidono con i punti uniti dell'applicazione

$$T(x) = x - f(x) \quad .$$

Se f è differenziabile ed è possibile determinare un chiuso $I \subseteq R$ mutato in sè da T e tale che

$$|1-f'(x)| \le K < 1 \qquad \forall x \in I \ .$$

Dal teorema delle contrazioni applicato a T si deduce che l'equazione $f(x)=0$ ha in I una (ed una sola) soluzione, che può venire determinata con il metodo delle approssimazioni successive.
Se non si verifica la situazione precedente ed f è due volte differenziabile si può considerare, in luogo di T, l'applicazione

$$T_1(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} .$$

Se è possibile determinare $I \subseteq R$ chiuso, mutato in sè da T_1 e tale che

$$\left| \frac{f(x)f''(x)}{f'^2(x)} \right| \leqslant K < 1 \qquad \forall x \in I ,$$

f ha in I uno e uno solo zero, che coincide con l'unico punto unito di T_1 in I e che è il limite della successione $\{x_n\}$, definita per ricorrenza (a partire da un punto $x_0 \in I$ arbitrario) dalla formula

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} .$$